A.R.I. - Sezione di Parma

Corso di preparazione esame patente radioamatore 2020

Circuiti in corrente alternata

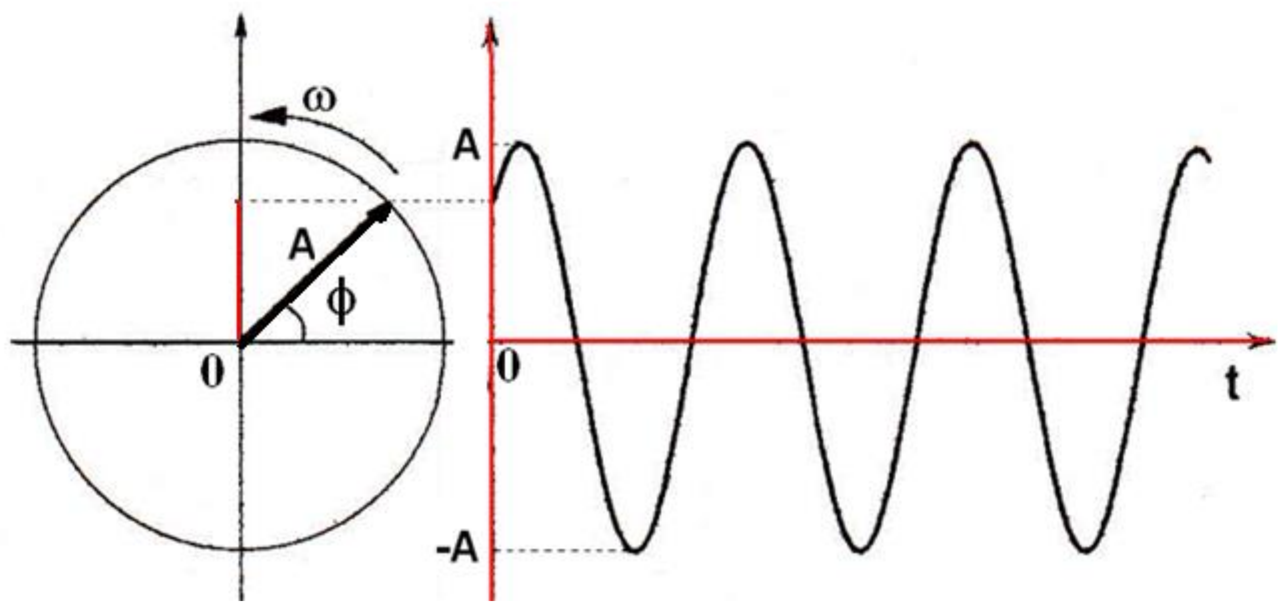
Carlo Vignali, I4VIL

SEGNALE SINUSOIDALE

E’ descritto da:

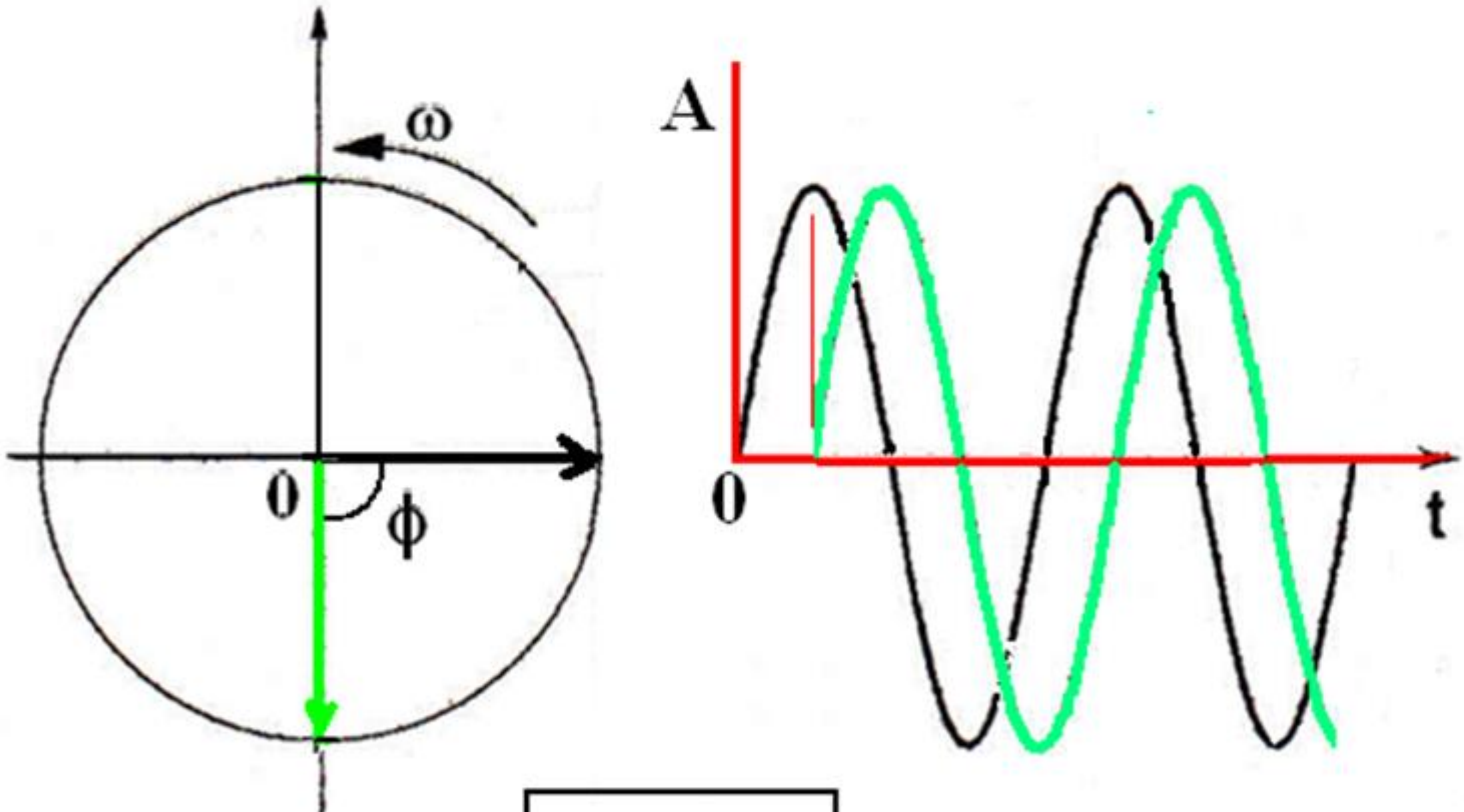
$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

dove: A = ampiezza del segnale
ω = velocità angolare ($\omega = 2 \pi f$)
ϕ = fase iniziale (fase al tempo t = 0)



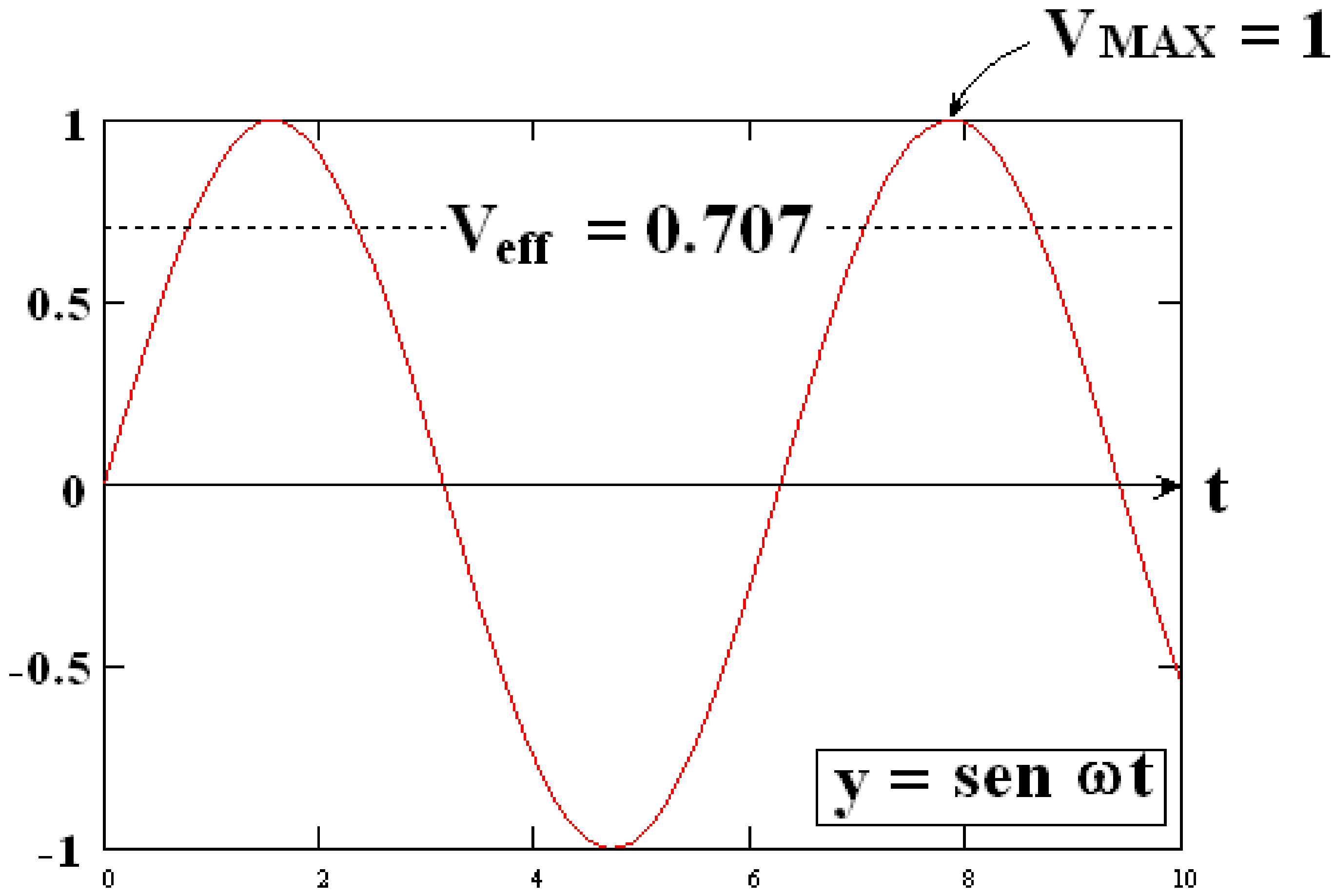
Il segnale sinusoidale è ottenuto dalla proiezione sull’asse verticale del vettore di modulo A, con origine nel centro degli assi che ruota in senso antiorario ad una velocità angolare ω e con fase iniziale ϕ.

DIFFERENZA DI FASE



$$\boxed{\phi = \omega\, t}$$

VALORE EFFICACE



$$\frac{V_{eff}}{V_{MAX}} = 0.707 \qquad \frac{V_{MAX}}{V_{eff}} = 1.41$$

Le potenze si sommano su un carico; i valori efficaci no !

Esempio: due segnali sinusoidali, entrambi di ampiezza 10 V (e di valore efficace 7.07 V), di frequenza differente, sono convogliati su un carico di 100 Ω.
Il primo segnale sviluppa potenza $P1 = (7.07)^2 / 100 = 0.5$ W
Idem il secondo, avendo uguale ampiezza: $P2 = 0.5$ W.
La somma dei due segnali, quindi, sviluppa sul carico la potenza di 1 W.

> Se, sbagliando, avessimo sommato i valori efficaci (7.07 + 7.07 = 14.14 V) e avessimo pensato di applicare questa tensione sul carico di 100 Ω, avremmo ottenuto: $(14.14)^2 / 100 = 2$ W

I valori efficaci di segnali "ortogonali" vanno sommati con la:

$$V_{tot} = \sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2}$$

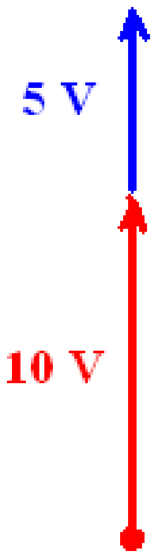
Infatti, sostituendo:

$$V_{tot} = \sqrt{7.07^2 + 7.07^2} = \mathbf{10\ V}$$

Questo segnale somma (10 V) , applicato ad un carico di 100 Ω, sviluppa correttamente una potenza di 1 W.

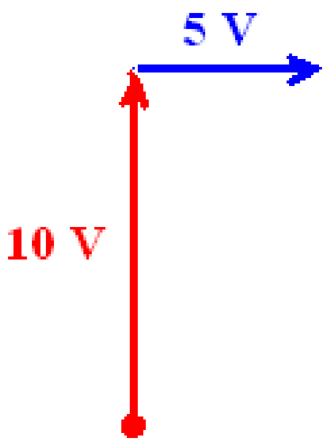
Segnali di stessa frequenza

Il segnale somma dipende dalla fase tra i segnali



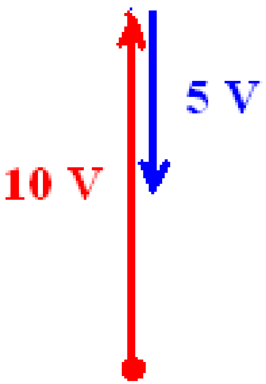
segnali in fase.

Il segnale somma è
la somma
dei due segnali



segnali sfasati di 90°

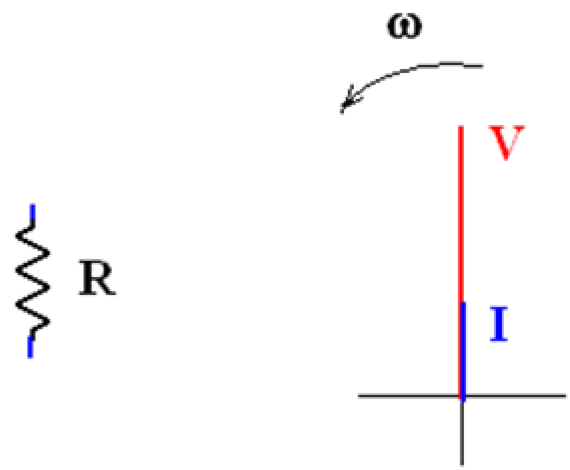
$$V_{tot} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \quad V$$



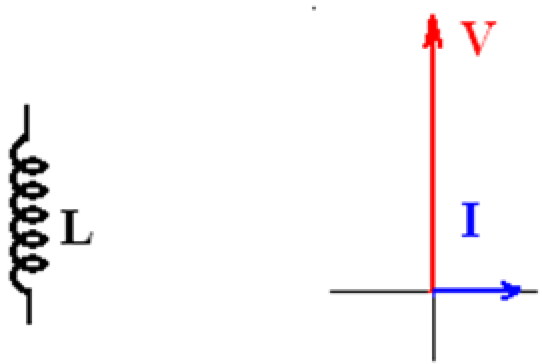
segnali sfasati di 180°

Il segnale somma è
la differenza
dei due segnali

COMPONENTI IN CORRENTE ALTERNATA

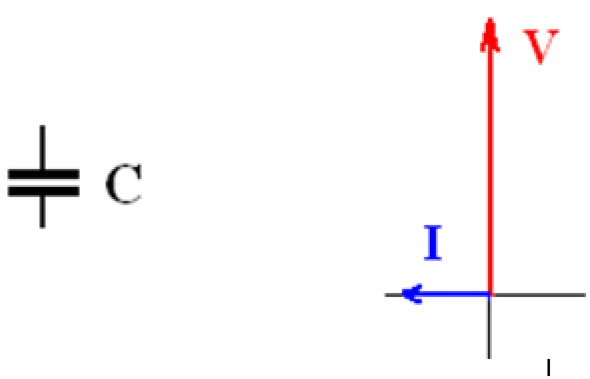


$$I = \frac{V}{R}$$



$$I = \frac{V}{X_L}$$

$$X_L = 2\pi f\ L$$

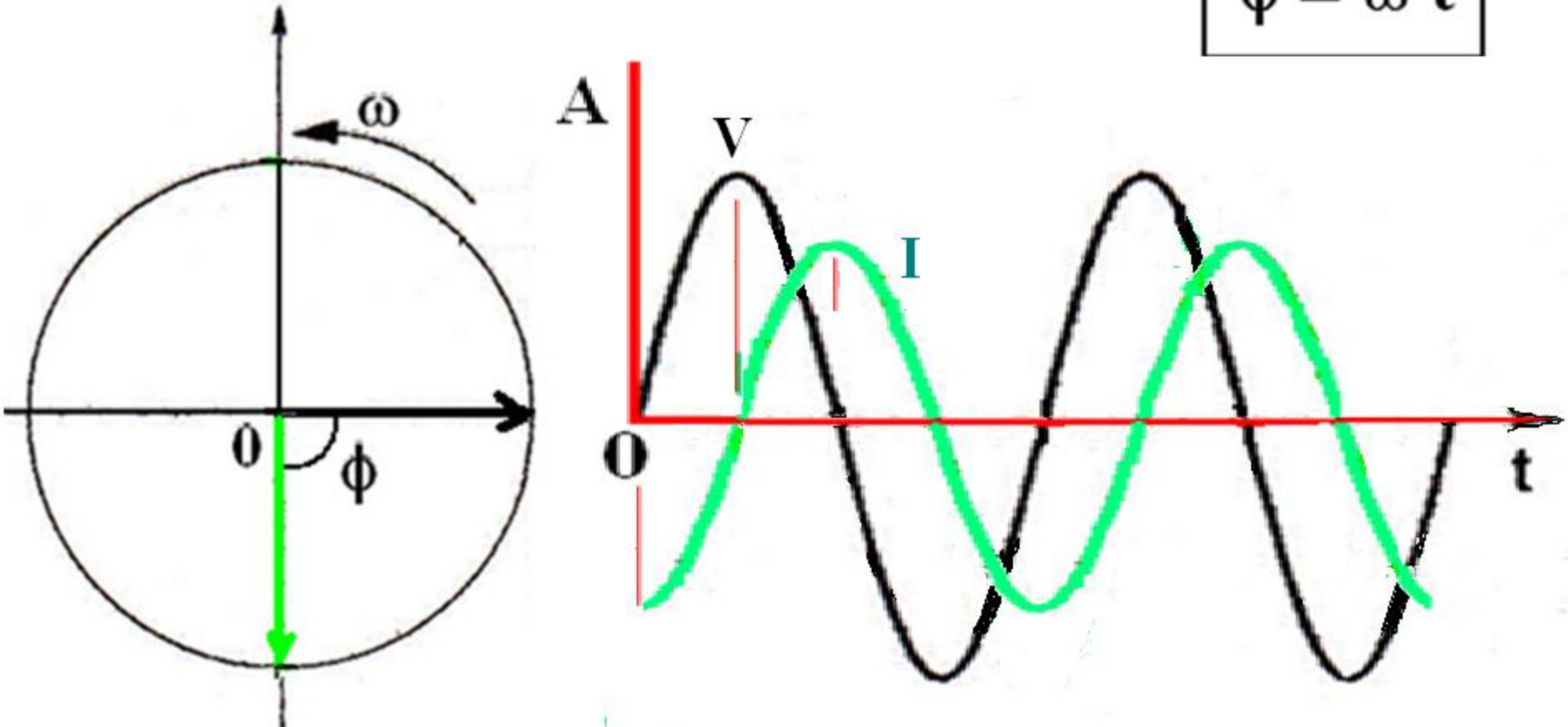


$$X_C = \frac{1}{2\pi f\ C}$$

$$I = \frac{V}{X_C}$$

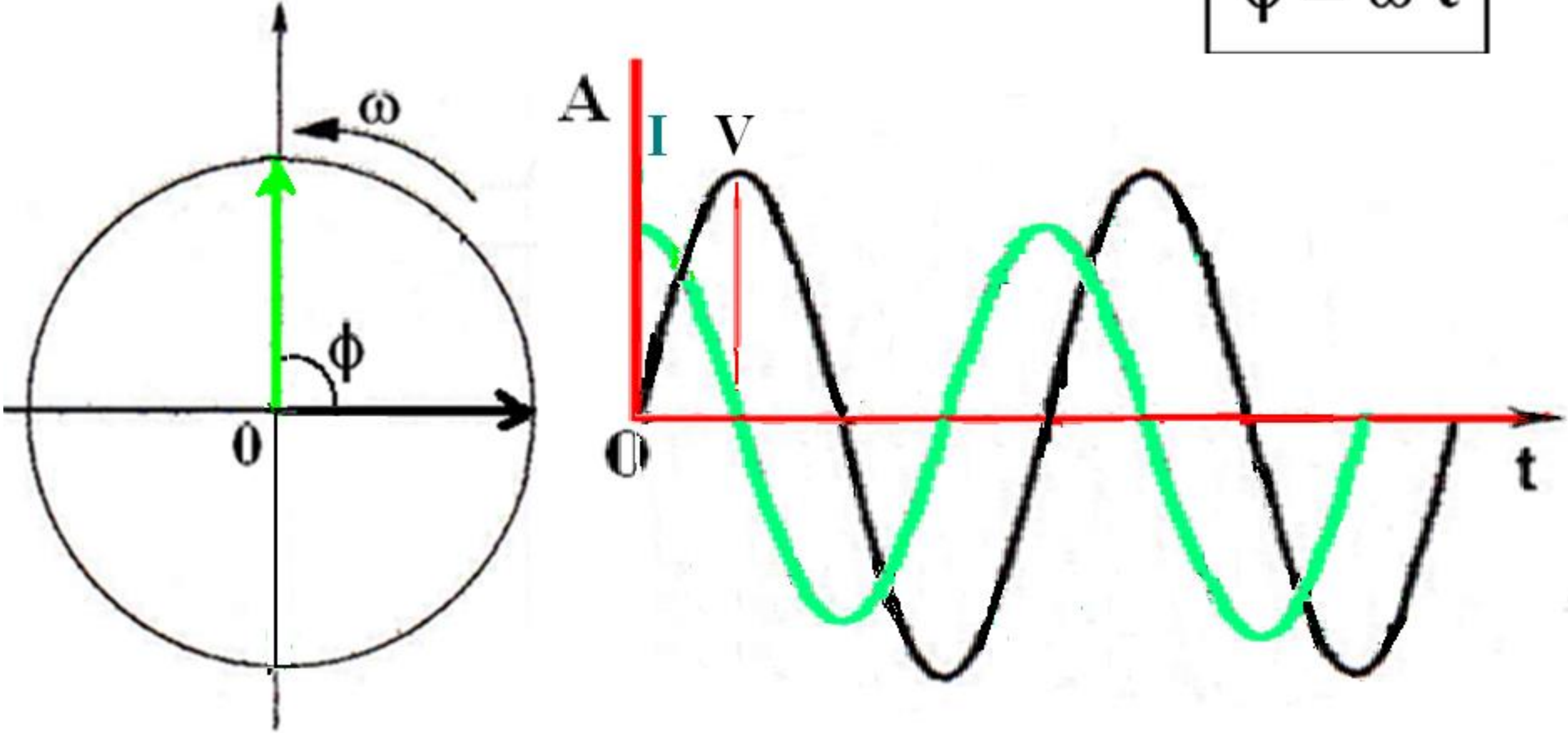
INDUTTANZA

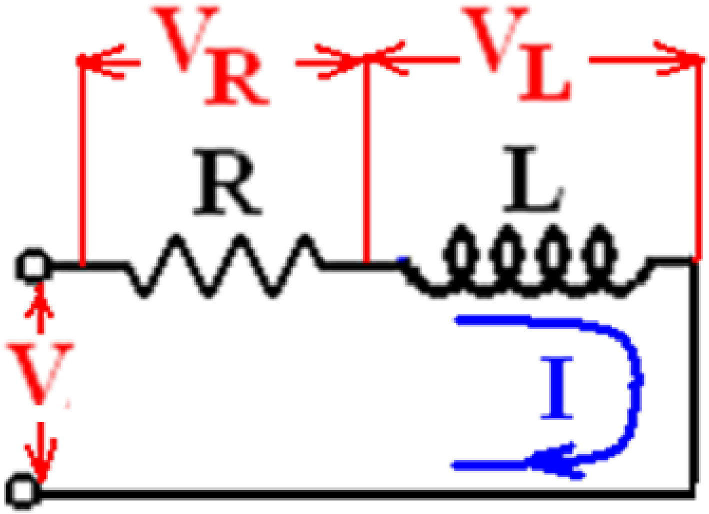
$$\boxed{\phi = \omega\, t}$$



CONDENSATORE

$$\boxed{\phi = \omega\, t}$$





-) Unica corrente nel circuito

-) La “somma” di V_R e V_L deve dare la V di alimentazione

-) V_R è in fase con I

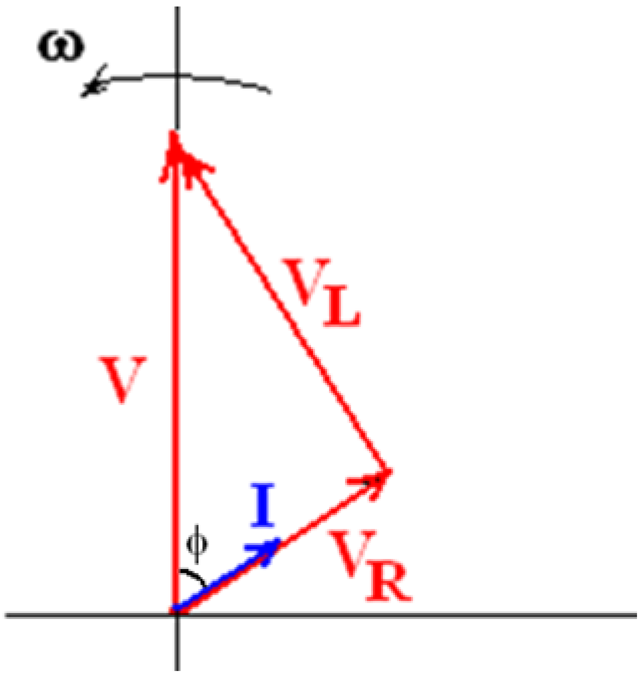
-) V_L è in quadratura con I che ritarda di 90°

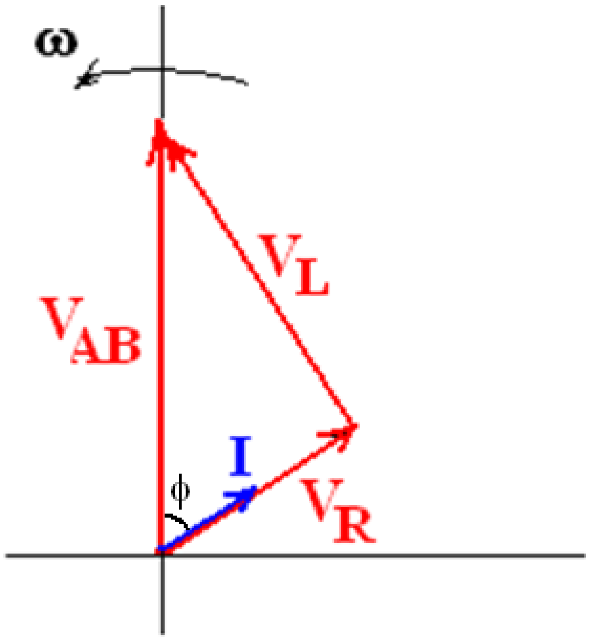
-) se ci fosse solo R, la I sarebbe in fase con V

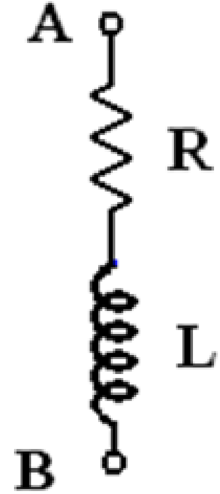
-) se ci fosse solo L, la I sarebbe in quadratura con V

-) essendoci R e L, la I sarà in ritardo ma meno di 90°

Soluzione:

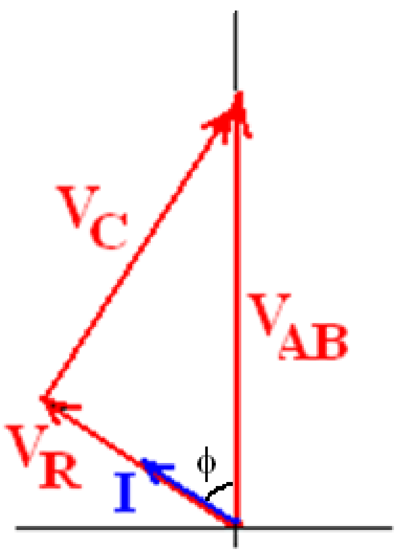


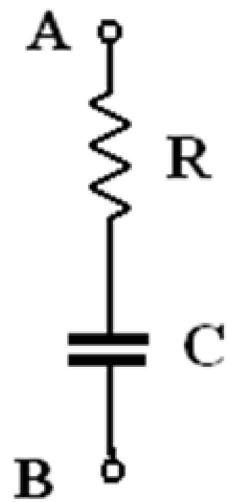




$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$X_L = 2\pi f L$$





$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

TRIANGOLO DELLE POTENZE

Potenza attiva [W]

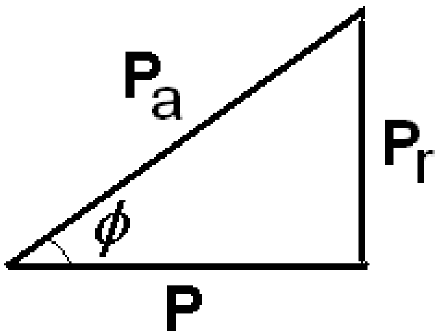
$$\boxed{P = V\ I\ \cos\phi}$$

diviene: $\boxed{P = V\ I}$

se circuito con sole resistenze
oppure se in corrente continua

Potenza reattiva [VAR]

$$\boxed{P_r = V\ I\ \mathrm{sen}\ \phi}$$

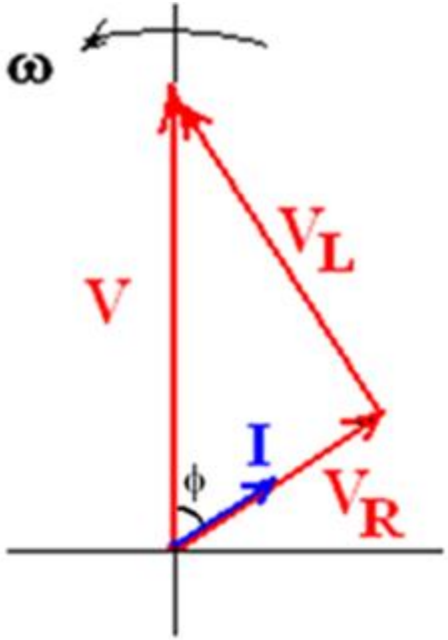


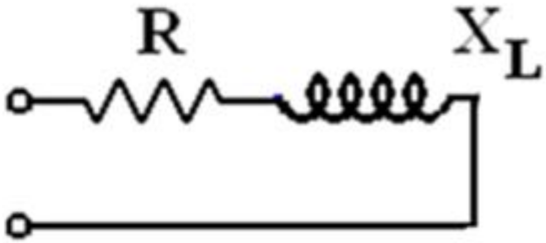
Potenza apparente [VA]

$$\boxed{P_a = V\ I}$$

$\cos\phi$ = fattore di potenza
(compreso tra 0 e 1)

ESEMPIO





$V = 100 \ \text{V}$
$R = 30 \ \Omega$
$X_L = 40 \ \Omega$

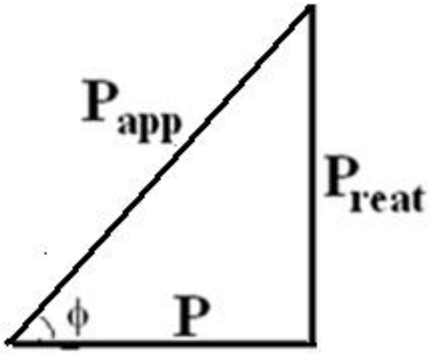
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{50} = 2 \ \text{A}$$

$$V_R = R \ I = 30 \cdot 2 = 60 \ \text{V}$$

$$V_L = X_L \ I = 40 \cdot 2 = 80 \ \text{V}$$

$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L \qquad V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \ \text{V}$$



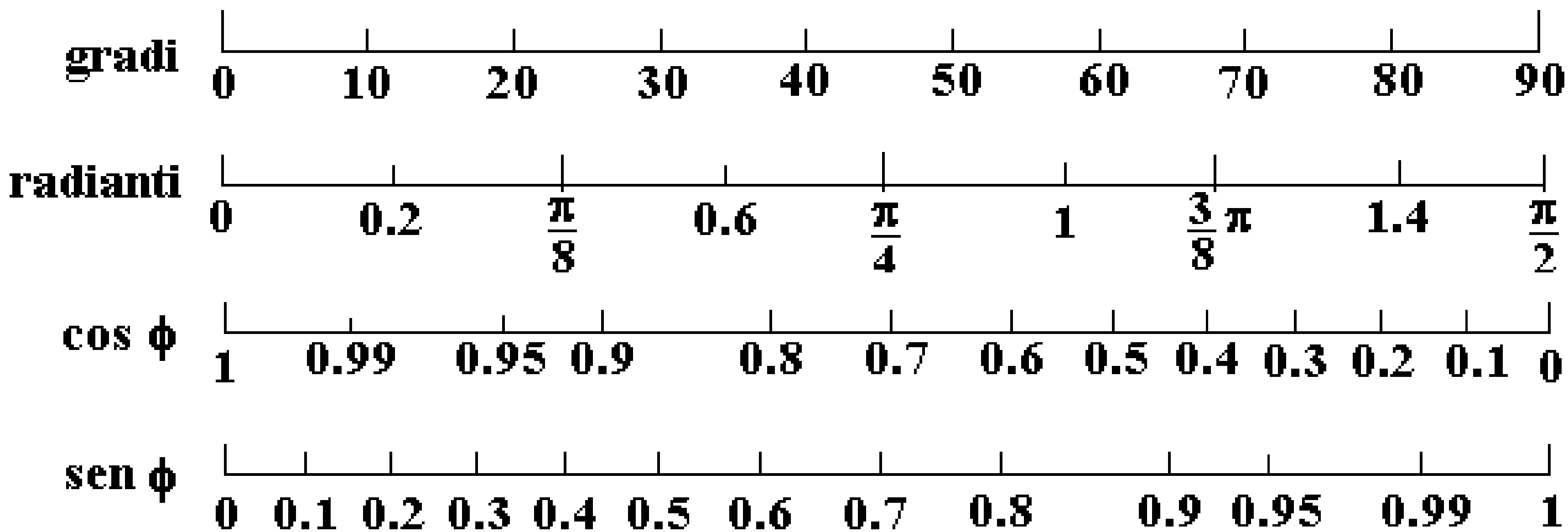
$$P = V_R \ I = R \ I^2 = 30 \cdot 2^2 = 120 \ \text{W}$$

$$P_{reat} = V_L \ I = X_L \ I^2 = 40 \cdot 2^2 = 160 \ \text{VAR}$$

$$P_{app} = Z \ I^2 = 50 \cdot 2^2 = 200 \ \text{VA}$$

$$\cos\phi = \frac{P}{P_{app}} = \frac{120}{200} = 0.6$$

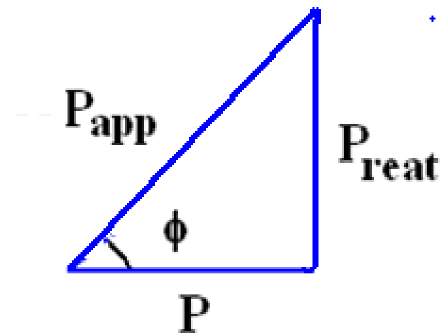
ANGOLO ϕ e corrispondenze



Esempio:
50 lampade fluorescenti da 40 W a 220 V/50 Hz assorbono 2000 W.
La corrente assorbita è I = 16 A.

La potenza apparente è : $220 \cdot 16 = 3520$ VA. (oltre il limite del contratto: 15 A / 3300 W).
Occorre rifasare con condensatori di capacità adeguata..........

$$\cos\phi = \frac{P}{P_{app}} = \frac{2000}{3520} = 0.57$$

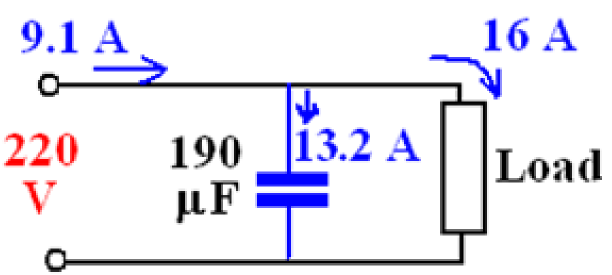


$$P_{reat} = \sqrt{P_{app}^2 - P^2} = \sqrt{3520^2 - 2000^2} = 2896 \text{ VAR}$$

Qual è la capacità necessaria per rifasare completamente? Ovviamente tale che la potenza reattiva (induttiva) sia compensata con analoga potenza reattiva capacitiva

$$P_{reat} = \frac{V^2}{X_C} \Longrightarrow X_C = \frac{220^2}{2896} = 16.7 \ \Omega$$

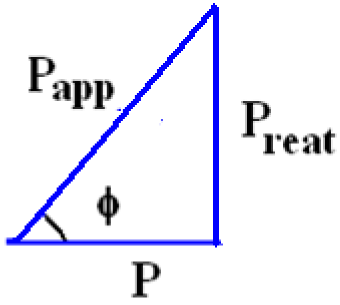
a cui corrisponde una capacità : $C = \dfrac{1}{2\pi f \ X_C} = 190 \ \mu F$



Con rifasamento totale, la corrente in linea si riduce a 9.1 A.

Potenza reale P :

P= 2000

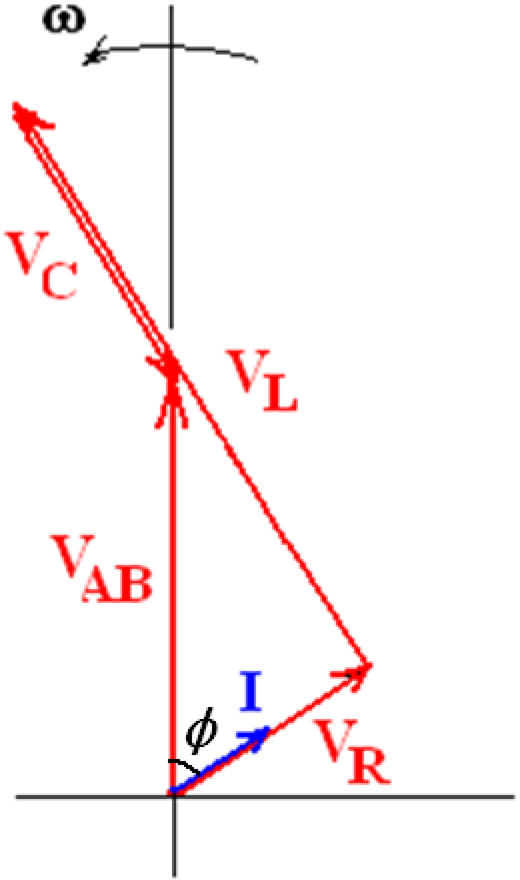


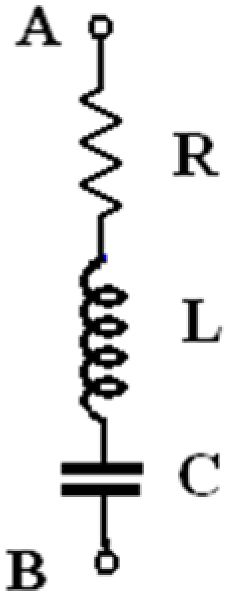
Con rifasamento completo, infatti, la corrente assorbita si riduce a:

I = P / V

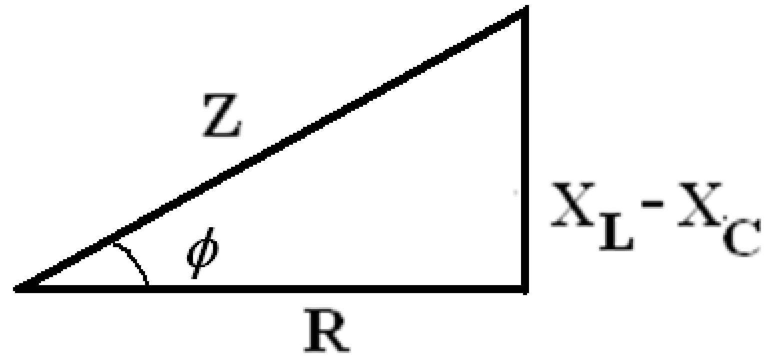
I = 2000 / 220 = 9.1 A circa

R L C serie $X_L > X_C$





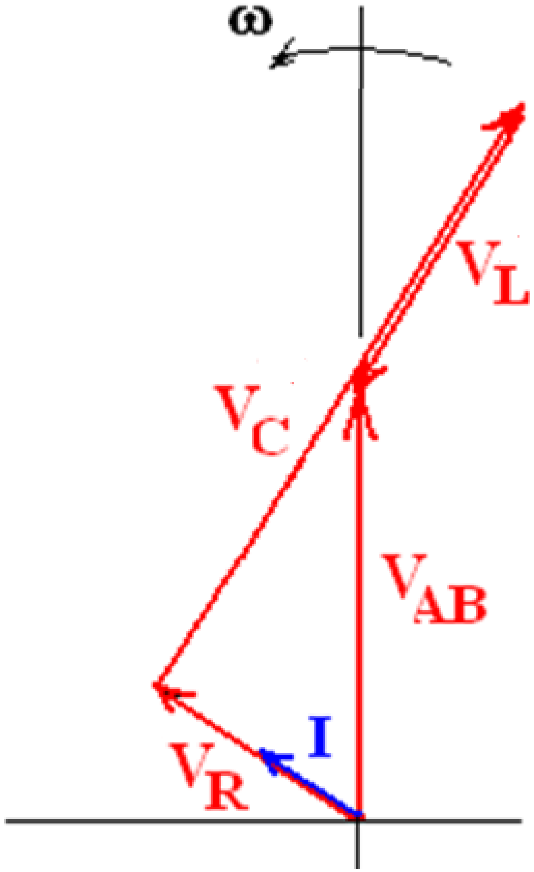
$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

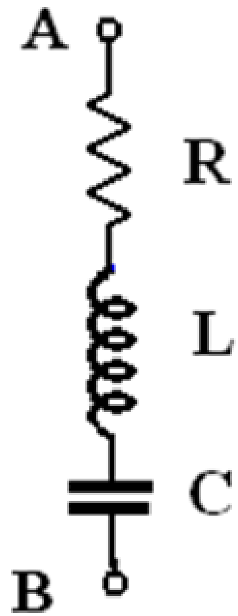


$$X_L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

R L C serie $X_C > X_L$





$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

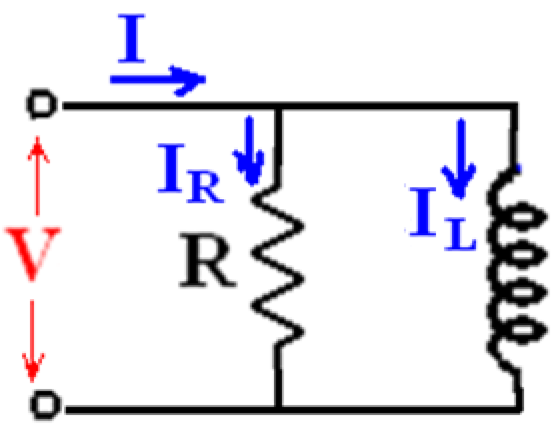
$$X_L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

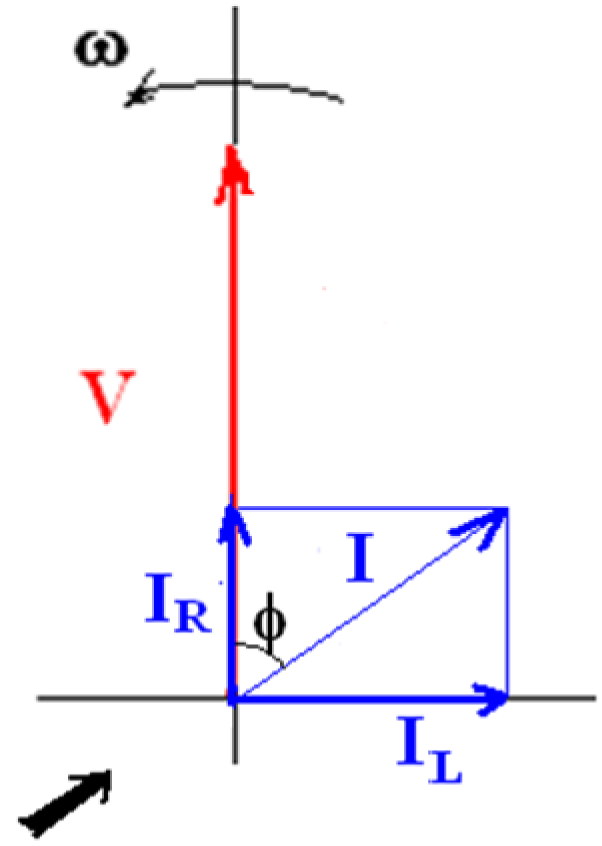
Cosa succede se $X_L = X_C$?

L'impedenza Z è reale ed ha un valore minimo e la corrente sarà massima.

R L parallelo



$$X_L = 2\pi f L$$

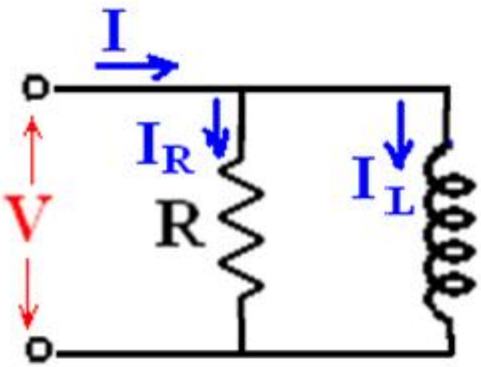


$$I_R = \frac{V_R}{R} \qquad I_L = \frac{V_L}{X_L}$$

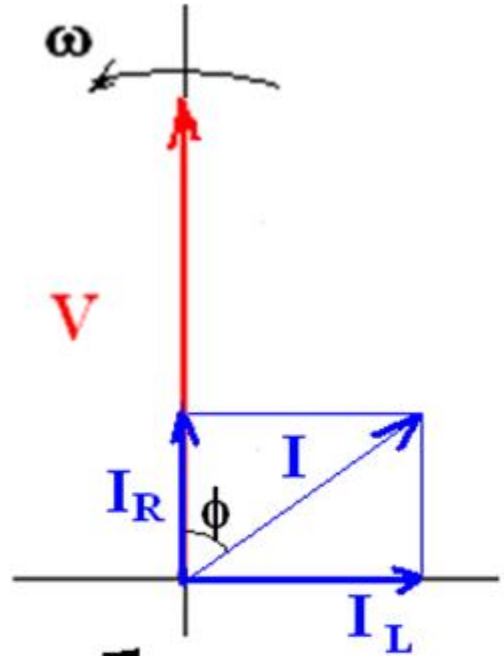
$$V_R = V_L = V$$

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L \qquad I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

ESEMPIO



$$X_L = 2\pi f L$$

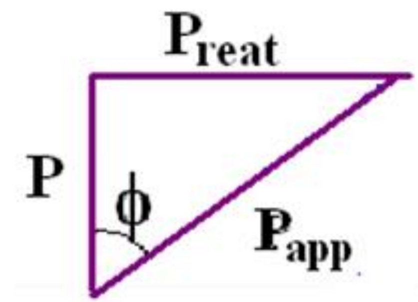


$$I_R = \frac{V_R}{R} \qquad I_L = \frac{V_L}{X_L}$$

corrente totale I: $\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

Potenza (attiva, reale): $P = R \cdot I_R^2 = \dfrac{V^2}{R}$

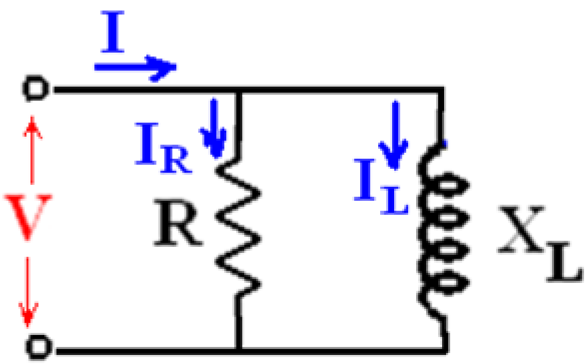


Potenza reattiva: $P_{reat} = \dfrac{V^2}{X_L} = X_L \cdot I_L^2$

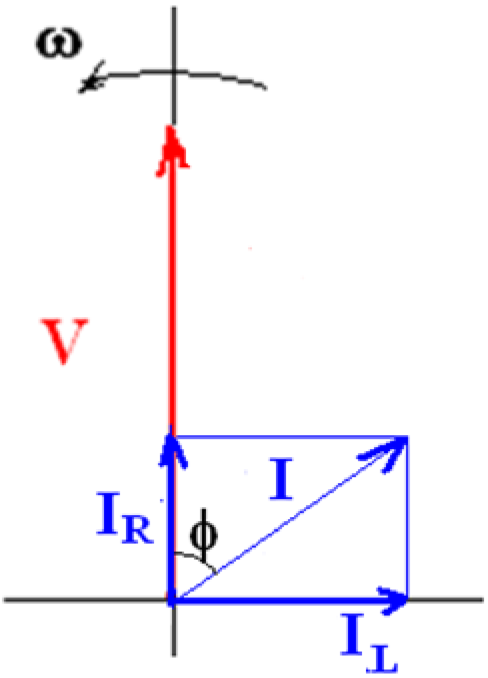
Potenza apparente: $P_{app} = V \cdot I$

$$\cos\phi = \frac{P}{P_{app}}$$

ESEMPIO



V= 12 V
L = 1 μH
R = 10 Ω
f = 10^6 Hz



$$X_L = 2\pi f L = 6.28\ \Omega$$

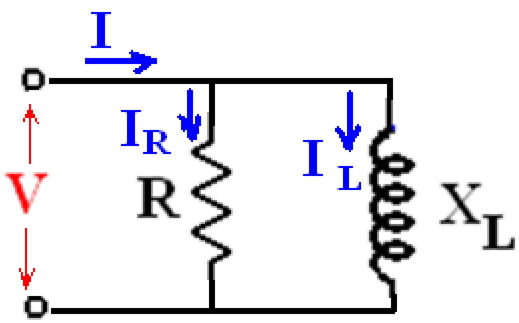
$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{12}{10} = 1.2\ \text{A}$$

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{12}{6.28} = 1.9\ \text{A}$$

corrente totale I :

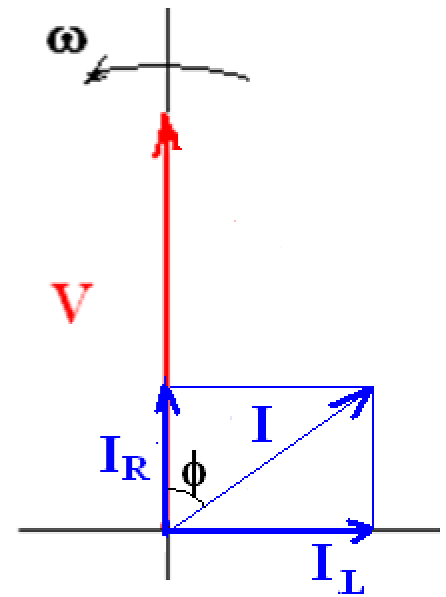
$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L \qquad I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{1.2^2 + 1.9^2} = 2.25\ \text{A}$$

ESEMPIO



V= 12 V
L = 1 μH
R = 10 Ω
f = 10^6 Hz

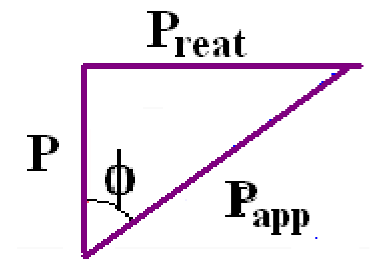
$$X_L = 2\pi f L = 6.28\ \Omega$$



$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{12}{10} = 1.2\ \text{A}$$

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{12}{6.28} = 1.9\ \text{A}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{1.2^2 + 1.9^2} = 2.25\ \text{A}$$



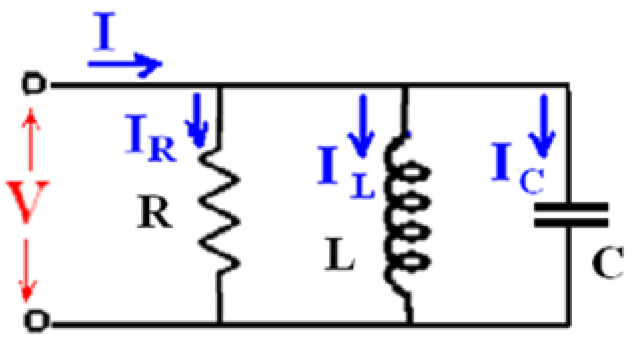
Potenza (attiva, reale): $P = R \cdot I_R^2 = \frac{V^2}{R} = 10 \cdot 1.2^2 = 14.4\ \text{W}$

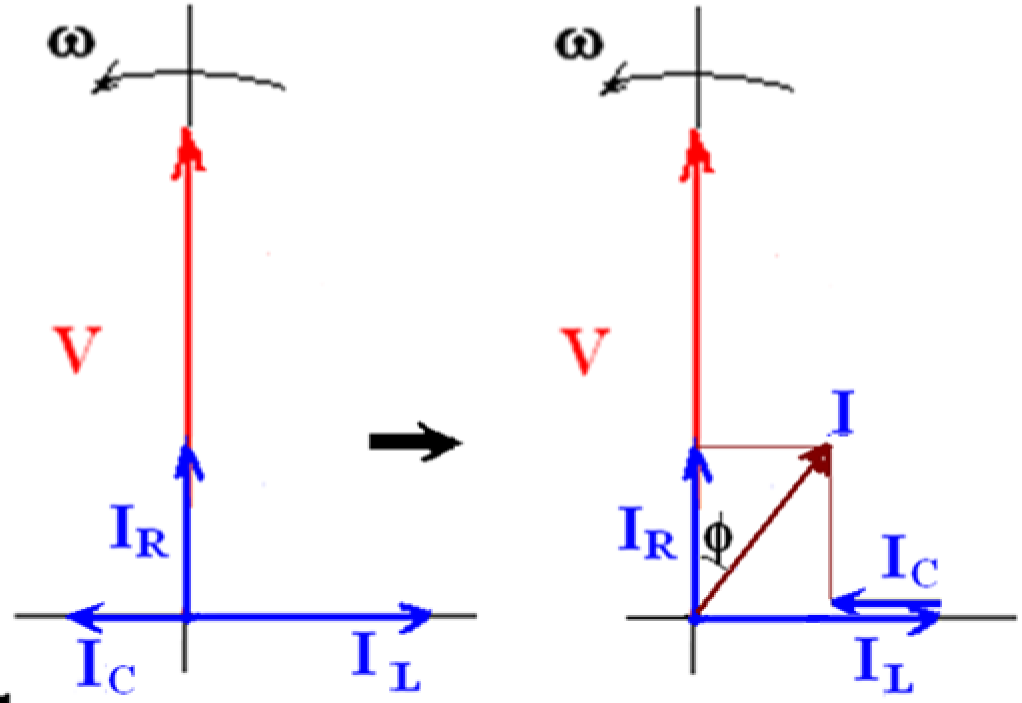
Potenza reattiva: $P_{reat} = X_L \cdot I_L^2 = 6.28 \cdot 1.9^2 = 22.9\ \text{VAR}$

Potenza apparente: $P_{app} = V \cdot I = 12 \cdot 2.25 = 27\ \text{VA}$

$$\cos\phi = \frac{P}{P_{app}} = \frac{14.4}{27} = 0.53$$

RLC parallelo





$$I_R = \frac{V_R}{R} \qquad I_L = \frac{V_L}{X_L} \qquad I_C = \frac{V_C}{X_C}$$

$$V_R = V_L = V_C = V$$

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

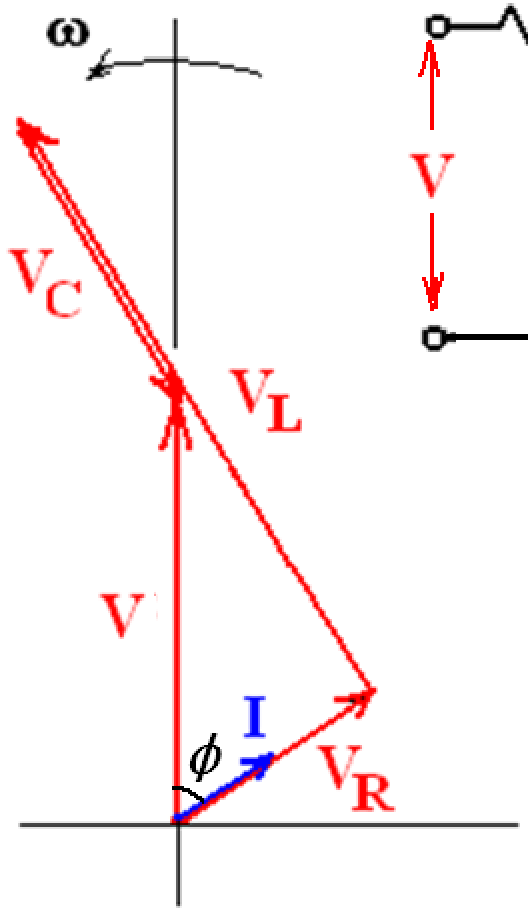
Impedenza Z:

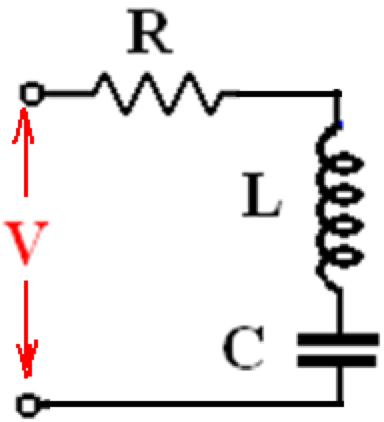
$$I = \frac{1}{Z} V \qquad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$$

Cosa succede se $X_L = X_C$?

La corrente totale I è minima, ovvero l'impedenza Z è massima.

RLC serie





$f = 20\ \text{MHz}$

$R = 20\ \Omega$

$L = 0.5\ \mu\text{H} \qquad X_L = 2\pi f L = 62.8\ \Omega$

$C = 200\ \text{pF} \qquad X_C = \dfrac{1}{2\pi f C} = 39.8\ \Omega$

$V = 10\ \text{V}$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 30.5\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{30.5} = 0.33\ \text{A}$$

$V_R = R\ I = 20 \cdot 0.33 = 6.6\ \text{V}$

$V_L = X_L I = 62.8 \cdot 0.33 = 20.7\ \text{V}$

$V_C = X_C I = 39.8 \cdot 0.33 = 13.1\ \text{V}$

V_L e V_C sono più grandi della V alimentazione !

Potenza attiva: $P = R\,I^2 = 20 \cdot 0.33^2 = 2.18\ \text{W}$

Potenza apparente: $P_{app} = V \cdot I = 10 \cdot 0.33 = 3.3\ \text{VA}$

X_L = X_C RISONANZA !

quando $X_L = X_C$?

$$2\pi f\, L = \frac{1}{2\,\pi\, f\, C}$$

$$(2\pi f)^2 LC = 1$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

f = frequenza di risonanza

ESEMPI:

Qual è la frequenza di risonanza con L:=1 μH e C = 113 pF ?

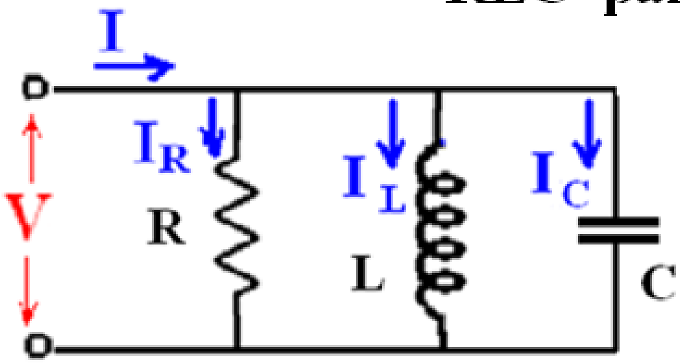
L= 1 μH = 10^{-6} H C = 113 pF = 113 10^{-12} F

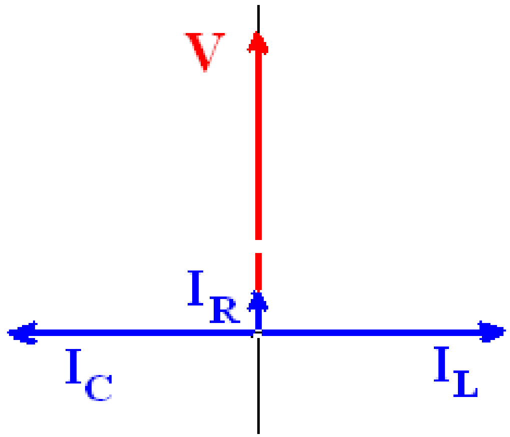
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-6}\cdot 113\ 10^{-12}}} \cong 15 \ \text{MHz}$$

Qual è la frequenza di risonanza con L = 10 mH e C = 100 nF ?

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-2}\cdot 100\ 10^{-9}}} \cong 5 \ \text{kHz}$$

RLC parallelo in risonanza





$R = 10000\ \Omega$

$X_L = 100\ \Omega$

$X_C = 100\ \Omega$

$V = 10\ V$

$V_R = V_L = V_C = V$

$\boxed{X_L = X_C}$

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{10}{10000} = 10^{-3}\ A$$

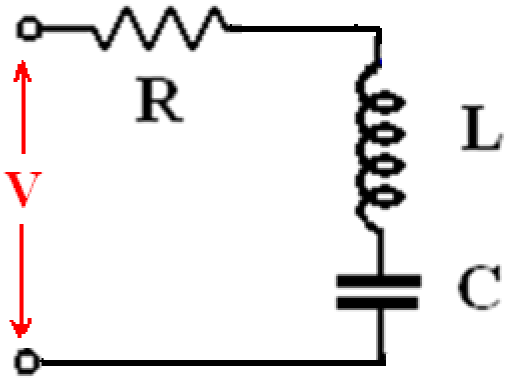
$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{10}{100} = 0.1\ A$$

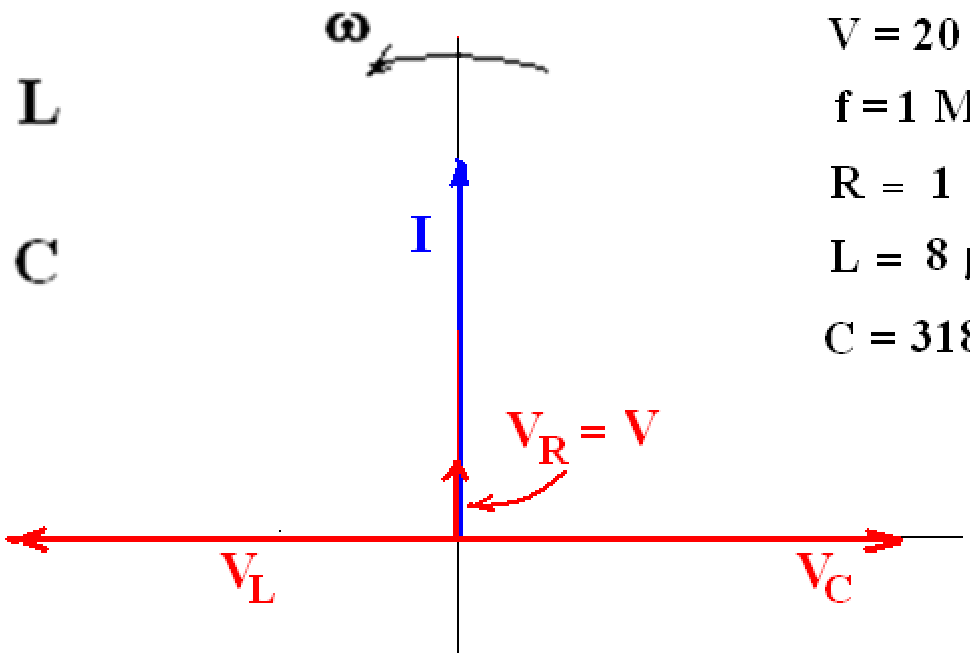
$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{10}{100} = 0.1\ A$$

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{10000}{100} = 100$$

La corrente nella L e nella C è Q volte maggiore che nella linea di alimentazione

RLC serie in risonanza





$V = 20\ V$

$f = 1\ MHz$

$R = 1\ \Omega$

$L = 8\ \mu H \qquad X_L = 50\ \Omega$

$C = 3180\ pF \qquad X_C = 50\ \Omega$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{20}{1} = 20\ A$$

$$\boxed{X_L = X_C}$$

$$V_R = R\ I = 1\ 20 = 20\ V$$

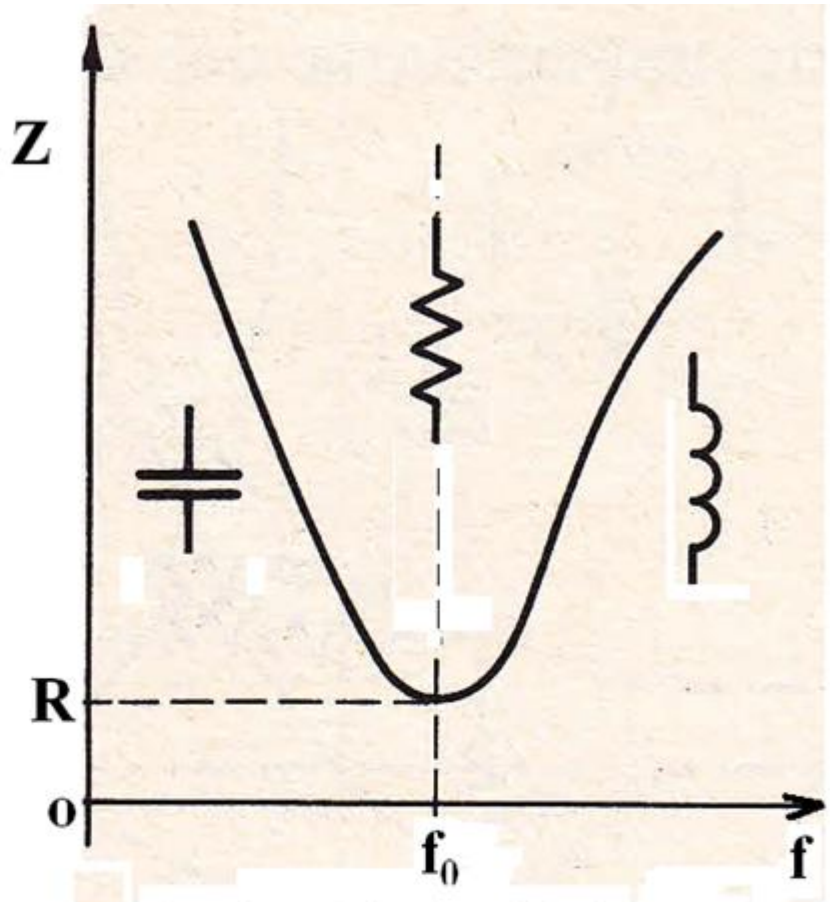
$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{50}{1} = 50$$

$$V_L = X_L\ I = 50\ 20 = 1000\ V$$

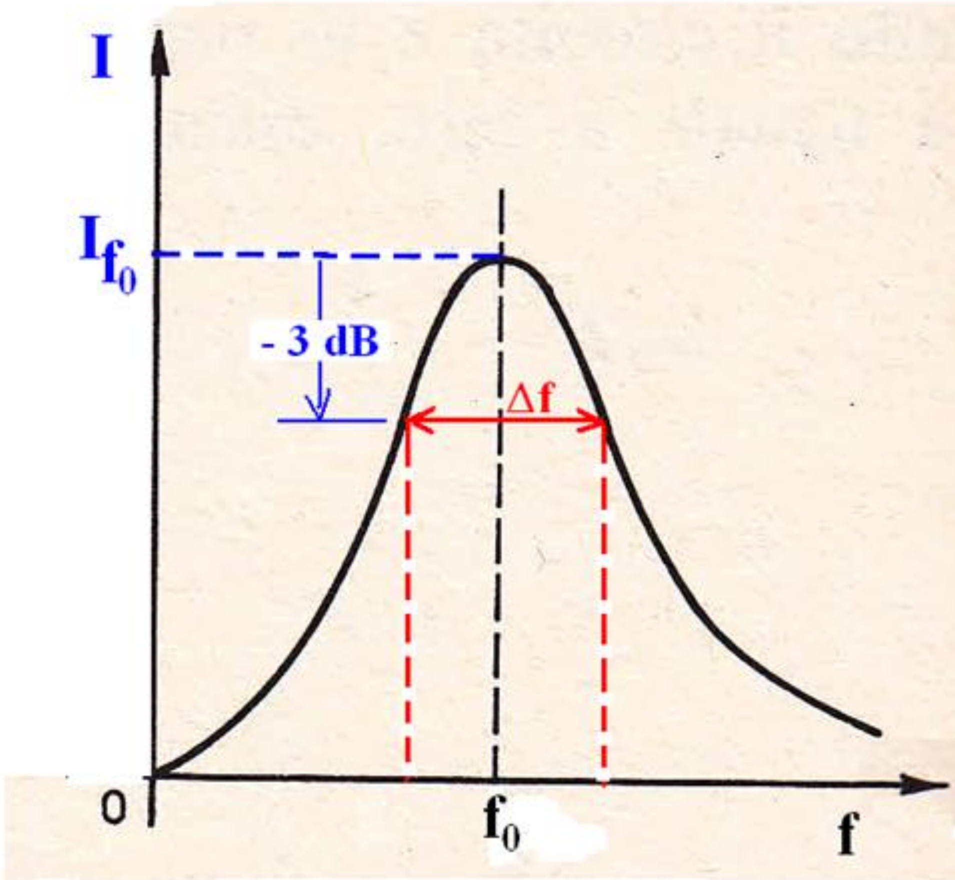
La tensione ai capi dell'induttanza e del condensatore è
Q volte la tensione di alimentazione !

$$V\ = X_C\ I = 50\ 20 = 1000\ V$$

CIRCUITO RLC serie



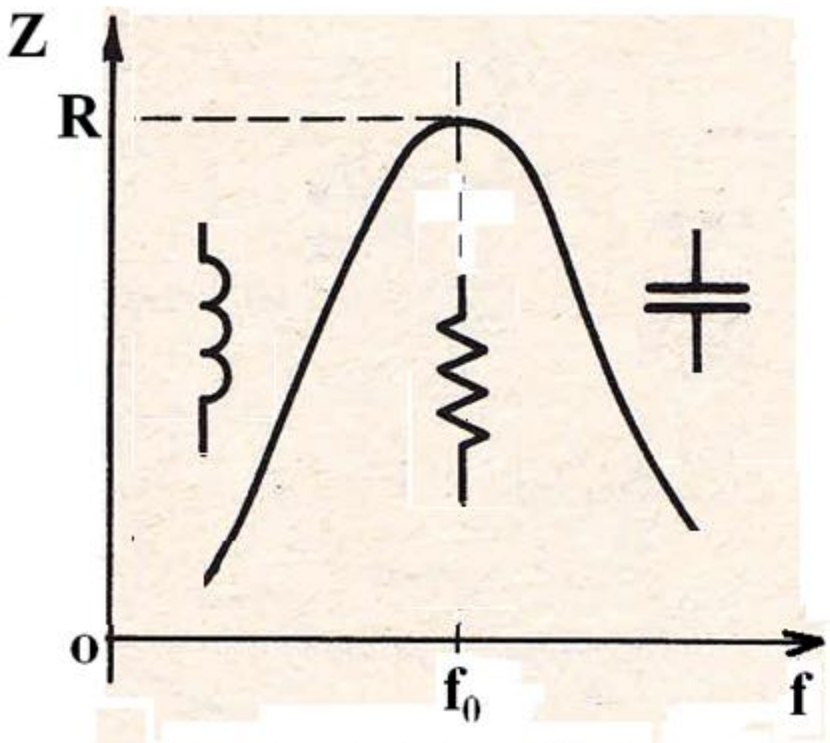
Impedenza in funzione della frequenza



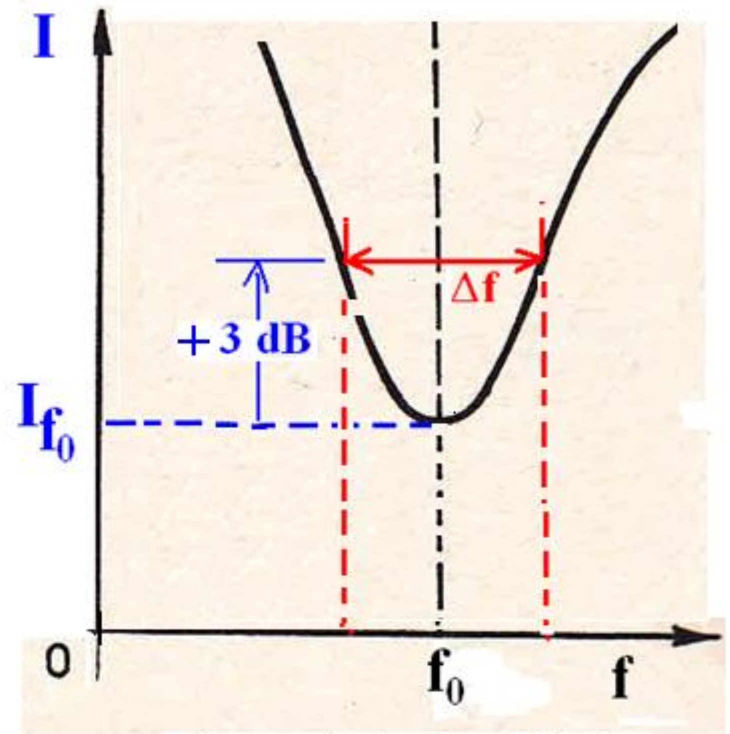
Corrente in funzione della frequenza

$$Q = \frac{X_L}{R} \qquad Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

CIRCUITO RLC parallelo



Impedenza in funzione della frequenza



Corrente in funzione della frequenza

$$Q = \frac{R}{X_L} \qquad Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

FATTORE DI MERITO Q

$$\boxed{X_L = X_C}$$

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia immagazzinata}}{\text{Energia dissipata per ciclo}}$$

Con Q grande e, quindi, con minore dissipazione per ciclo, le oscillazioni tendono a durare più a lungo e a smorzarsi più lentamente

La risposta del circuito può diventare enorme (tensione, corrente), ma con banda stretta

circuito risonante parallelo	circuito risonante serie
$Q = \frac{R}{X_L}$ $\quad Q = \frac{f_0}{\Delta f}$	$Q = \frac{X_L}{R}$ $\quad Q = \frac{f_0}{\Delta f}$
$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$	$Q = R\sqrt{\frac{L}{C}}$